Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$, on considère les points A(0 , -2 , 0) ; B(1 , 1 , -4) ; C(0 , 1 , -4) et (S) l'ensemble des points M(x , y , z) tels que :
$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$

0,5 — 1) Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(1\,,2\,,3)$ et de rayon $R=5$

1 — 2) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{\jmath}+3\vec{k}$ et en déduire que : $4y+3z+8=0$ est une équation du plan (ABC)

0,5 — b) Calculer d(Ω , (ABC)) et en déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

3) Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC)

0,5 — a) Montrer que : $\begin{cases} x=1 \\ y=2+4t \\ z=3+3t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ)

0,25 — b) Montrer que le triplet de coordonnées du point d'intersection H de la droite (Δ) et le plan (ABC) est (1 , -2 , 0)

0,25 — c) Vérifier que H est le point de tangence de la sphère (S) et le plan (ABC)

Exercice 2 (3 points) :

1 — 1) Résoudre dans ℂ l'équation : $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

2) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(0\,,\vec{e_1}\,,\vec{e_2})$ les points A , B et C d'affixes respectives : $a=8i$, $b=4\sqrt{3}-4i$ et $c=2(4\sqrt{3}+4i)$. Soient z et z' les affixes respectives d'un point M et de son image M' par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$

0,5 — a) Montrer que : $z'=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

0,25 — b) Vérifier que le point B est l'image du point B par la rotation R

0,75 — c) Vérifier que : $\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ et écrire : $\frac{a-b}{c-b}$ sous forme trigonométrique

0,5 — d) En déduire que le triangle ABC est équilatéral

Exercice 3 (3 points) :

Une urne contient 8 boules portant le nombres 1 , 1 , 1 , 2 , 2 , 2 , 3 , 3 , indiscernables au toucher. On tire au hasard, successivement et sans remise, 2 boules de l'urne. On considère les événements suivants :

A : « Obtenir deux boules portant le nombre 2 »

B : « Obtenir au moins une boule portant le nombre 3 »

1,25 — 1) Montrer que : $p(A)=\frac{3}{28}$ et $p(B)=\frac{13}{28}$

0,25	2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées portant un nombre impair
0,75	a) Déterminer les valeurs prises par X
0,75	b) Montrer que : $p(X=1)=\frac{15}{28}$
	c) Donner la loi de probabilité de X

	Exercice 4 (3 points) :
	On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{3u_n}{21+u_n}$
0,5	1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$
0,75	2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$
0,5	3) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente
0,75	4) a) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq\left(\frac{1}{7}\right)^n$
0,5	b) Préciser la limite de la suite (u_n)

	Exercice 5 (8 points) :
	I. On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^3-x-2\ln(x)+3$
0,5	1) a) Vérifier que : $\forall x\in]0,+\infty[$, $3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$
0,25	b) Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[$, $g'(x)=\frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$
0,5	2) a) Vérifier que : $\forall x\in]0,+\infty[$, $\frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}>0$
0,25	b) En déduire le signe de $g'(x)$ est celui de $(x-1)$ sur $]0,+\infty[$
0,5	3) a) Montrer que g est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$
0,5	b) En déduire que : $\forall x\in]0,+\infty[$, $g(x)>0$ (remarquer que $g(x)>0$)
	II. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-1+\frac{x-1+\ln(x)}{x^2}$
	Et on désigne par (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique
1	1 cm
0,5	1) Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ et en déduire que f est croissante sur
0,75	$]0,+\infty[$
0,5	2) a) Montrer que : $\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat
0,5	b) Montrer que : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1+\ln(x)}{x^2}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
0,75	(Rappel : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}=0$
	c) Montrer que la droite (Δ) d'équation : $y=x-1$ est asymptote à la courbe (C_f) en $+\infty$
1	3) Montrer $y=3(x-1)$ est une équation de la droite tangente au point de coordonnées (1 , 0)
0,5	4) Tracer dans le repère $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la courbe (C_f) et la droite (Δ) (on admet que (C_f) admet un
	point d'inflexion unique que l'on ne demande pas de le déterminer)
	5) a) En intégrant par parties, montrer que : $\int_1^e\frac{\ln(x)}{x^2}\,dx=1-\frac{2}{e}$
	(poser $u'(x)=\frac{1}{x^2}et\ v(x)=\ln(x)$)
	b) Montrer que l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), la droite (Δ) et le droites
	d'équations $x=1$ et $x=e$ est $\left(1-\frac{1}{e}\right)cm^2$